Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

1. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Hinweise

1.1 Klausur – Teilmodul Lineare Algebra und Analysis

- Unterrichtsstoff: Großteil des Oberstufenstoffs und mehr!
- Klausurrelevanter Stoff: gesamter Stoff, vgl. standortübergreifende Klausur

1.2 Klausurvorbereitung

- Während des Semesters regelmäßig die Vorlesung nacharbeiten und Aufgaben selber rechnen.
- Frühzeitig, nicht erst einen Monat vor der Klausur, mit Klausurvorbereitungen beginnen:
  - Lernplan erstellen
  - Lernunterlagen frühzeitig zusammenstellen
  - Lerngruppen organisieren
- Viele Aufgaben rechnen. Dazu gibt es viele Aufgabenangebote:
  - Aufgaben aus der Vorlesung (zum Üben nachrechnen)
  - Aufgabenblätter, Übungsklausuren
  - Standortübergreifende Aufgabensammlung (→ ILIAS)
  - Zusätzliche Übungsaufgaben / Wiederholungsaufgaben aus der Übungsveranstaltung
  - Das Übungsbuch von Frau Prof. Schuldenzucker
- Alte Klausur im standortübergreifenden Mathematik-Ordner (→ ILIAS)

2 Beispielrechnung zum Absolutbetrag

Beispiel:

$$|x-4| > 3$$

Lösungsweg:
Zunächst wird die linke Seite der Ungleichung untersucht und dabei werden die Bedingungen hergeleitet, für welche Werte von x welches Vorzeichen vor dem Ausdruck innerhalb der Betragsstriche zu setzen wäre, damit die Betragsstriche entfallen können.

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{für } x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \text{ (Fall 1)} \\ -(x-4) & \text{für } x-4 < 0 \Rightarrow x < 4 \text{ (Fall 2)} \end{cases}$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, die im Folgenden einzeln betrachtet werden müssen.

Fall 1: $x \geq 4$

- Für $x \geq 4$ kann die Ungleichung $|x-4| > 3$ ohne Betragsstriche geschrieben werden:

$$x-4 > 3.$$

- Auflösen der Ungleichung nach x in dem auf beiden Seiten $+4$ addiert wird:

$$\begin{aligned} x-4 \quad \mathbf{+4} &> 3 \quad \mathbf{+4} \\ x &> 7 \end{aligned}$$

- Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ für den Fall 1 erfüllt beide Bedingungen gleichzeitig:

$$\begin{aligned} x &\geq 4 \\ x &> 7 \end{aligned}$$

  Mit $x > 7$ ist auch $x \geq 4$ erfüllt. D.h. die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ besteht aus allen Werten $x > 7$.

Fall 2: $x < 4$

- Für $x < 4$ kann die Ungleichung $|x-4| > 3$ ohne Betragsstriche geschrieben werden, wenn ein negatives Vorzeichen berücksichtigt wird:

$$-(x-4) > 3.$$

- Auflösen der Klammer auf der linken Seite liefert:

$$-x + 4) > 3.$$

- Auflösen der Ungleichung nach x in dem auf beiden Seiten -4 addiert wird:

$$\begin{aligned} -x + 4 \quad \mathbf{-4} &> 3 \quad \mathbf{-4} \\ -x &> -1 \end{aligned}$$

- Addiere auf beiden Seiten $+x$ und $+1$:

$$\begin{aligned} -x \quad \mathbf{+x+1} &> -1 \quad \mathbf{+x+1} \\ 1 &> x \\ x &< 1 \end{aligned}$$

  Die letzten drei Umformungen sind gleichbedeutend mit der Merkregel:
  "Multiplikation mit -1 dreht das Ungleichheitszeichen herum".

- Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2$ für den Fall 2 erfüllt beide Bedingungen gleichzeitig:

$$\begin{aligned} x &< 4 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

  Mit $x < 1$ ist auch $x < 4$ erfüllt. D.h. die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2$ besteht aus allen Werten $x < 1$.

Ergebnis:
Die Gesamtlösungsmenge der Betragsungleichung ist nun die Vereinigungsmenge beider Fälle:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$$

D.h. die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ besteht aus allen Werten x, die größer als 7 oder kleiner als 1 sind. Anders ausgedrückt: Die Werte x dürfen nicht aus der Komplementärmenge, dem geschlossenen Intervall $[1, 7]$, entnommen werden.