Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

3. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Polynome als mathematische Modelle für ökonomische Strukturen und Prozesse:
  - Produktionsfunktionen, die die Abhängigkeit der produzierten Menge x von einem Produktions-Inputfaktor r abbilden.
  - Preis-Angebots-Funktion $p_A(x_A)$ als Umkehrfunktion der Angebotsfunktion $x_A(p_A)$.
  - Preis-Absatz-Funktion $p_N(x_N)$ als Umkehrfunktion der Nachfragefunktion $x_N(p_N)$.
  - Berechnung der Erlösfunktion mit Hilfe der Preis-Absatz-Funktion $E(x) = x\, p_A(x_A)$.
  - Kostenfunktion $K(x)$ und Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x}$.
  - Gewinnfunktion als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$.
  - Nutzenfunktionen $U(x_1, x_2)$.

    Beispiel aus der Vorlesung (Cobb-Douglas-Typ): $U(x_1, x_2) = \sqrt[5]{x_1^4 x_2} = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$.
- Graphische Darstellungen von einfachen Polynomen, abhängig vom Grad n des Polynoms.
- Verkettung von Funktionen. Bei gegebenem $f(x)$ und $g(x)$, Berechnung von $f(g(x))$ und $g(f(x))$.
- Bestimmung der Umkehrfunktion f^{-1} als Umkehrabbildung der Funktion $f(x)$. Besondere Verkettung: $x = f^{-1}(f(x))$.
- Symmetrieeigenschaften von Funktionen; insbesondere Unterscheidung von Achsen- und Drehsymmetrie.
- Bedeutung der Nullstellen eines Polynoms. Berechnung der Nullstellen mit der pq-Formel im Fall eines Polynoms vom Grad $n = 2$ (quadratische Funktionen).

2 Bestimmung der Nullstellen einer Funktion

Am Beispiel einer Gewinnfunktion wird zunächst der Rechenweg von der Darstellung in Linearfaktoren zu der Darstellung in Polynomform gezeigt. Abschließend wird der Rechenweg von der Polynomdarstellung zurück zur Darstellung in Linearfaktoren verdeutlicht, um die Nullstellen zu bestimmen.

2.1 Unternehmensbeispiel

Ein Recyclingunternehmen verkauft jeden Monat eine in Tonnen gemessene Gewichtsmenge x an Edelmetall. Von diesem Unternehmen sei die monatliche Kapazitätsgrenze von $x_{max} = 2.5$ Tonnen Edelmetall und die folgende Gewinnfunktion für den Gewinn in Mio. € bekannt:

$$G(x) = -2(x-1)(x+1)(x-2).$$

2.2 Definitionsbereich

Aufgrund der Kapazitätsbeschränkung und weil die Menge Edelmetall ausschließlich positive Werte annehmen kann, dürfen nur Werte aus dem Intervall $x \in [0, 2.5]$ in die Gewinnfunktion eingesetzt werden.

Somit lautet der Definitionsbereich der Gewinnfunktion in Mengenschreibweise:

$$D_G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2.5\}.$$

2.3 Nullstellen der Gewinnfunktion

Da die Gewinnfunktion in Linearfaktoren gegeben ist, können die Nullstellen direkt abgelesen werden[1]. Dazu ist zu untersuchen, für welche Werte von x die einzelnen Klammern Null werden.

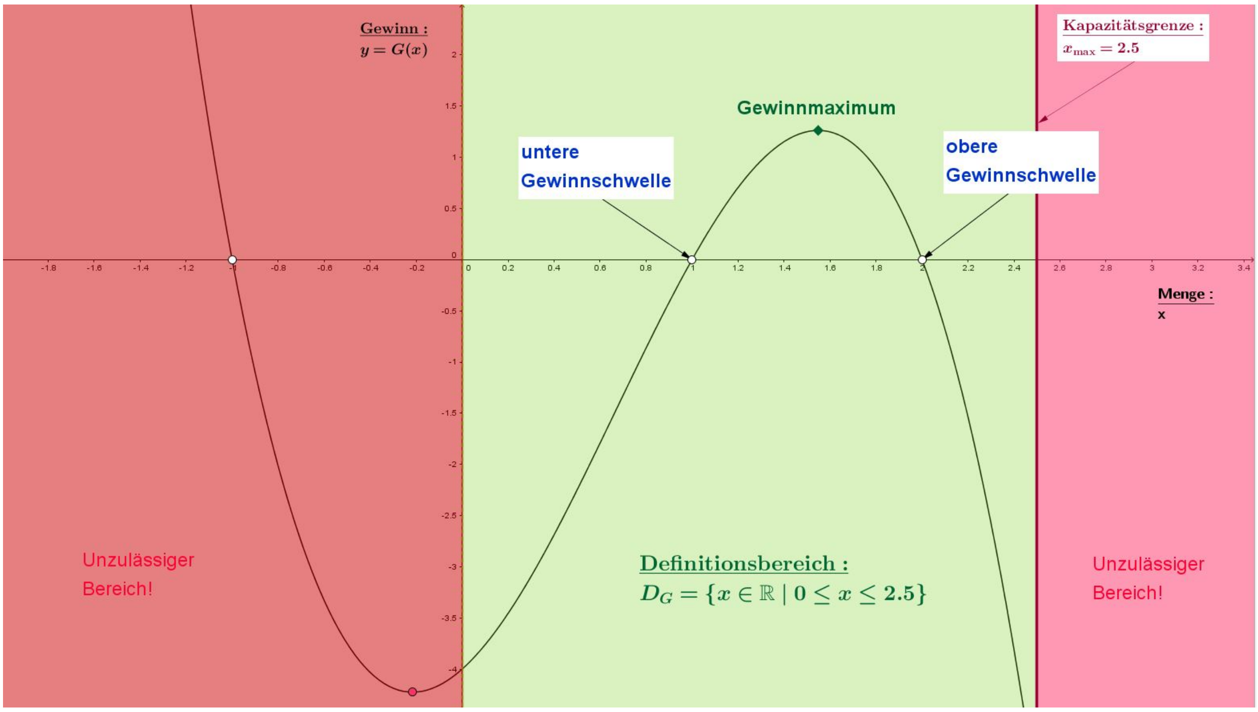
- Erste Klammer $x = +1$
- Zweite Klammer $x = -1$
- Dritte Klammer $x = +2$

Der konstante Faktor (-2) vor den Klammern ändert den Wert der Nullstellen nicht.

Es kann festgestellt werden, dass nur die Nullstellen $x = +1$ und $x = +2$ im Definitionsbereich D_G der Gewinnfunktion liegen.

[1] Regel: Ein Produkt aus zwei Faktoren $a \cdot b$ ist Null, wenn einer oder beide Faktoren Null sind.

2.4 Grafische Darstellung des Sachverhalts



Aufgetragen ist der Gewinn G des Unternehmens in Mio. € abhängig von der monatlich verkauften Menge Edelmetall x in Tonnen.

Der grüne Bereich verdeutlicht den Definitionsbereich von $x = 0$ bis zur Kapazitätsgrenze $x_{max} = 2.5$ Tonnen. In den roten Bereichen liegen somit unzulässige Werte für x.

Da der eingezeichnete Graf von $G(x)$ zwischen den Nullstellen $x = +1$ und $x = +2$ positiv ist, markieren diese beiden Nullstellen die unter und die obere Gewinnschwelle.

Die Bestimmung der Produktionsmenge für das Gewinnmaximum zwischen den Nullstellen erfolgt später mit den Ableitungsregeln.

2.5 Von der Linearfaktordarstellung zum Polynom

Ausmultiplizieren der Klammern führt zur Gewinnfunktion in Polynomform:

$$\begin{aligned}
G(x) &= -2\,\overbrace{(x-1)(x+1)}^{\text{3-tes Binom}}(x-2) && \\
&= -2 \qquad (x^2-1) \quad (x-2) && \mid \text{3-tes Binom anwenden} \\
&= -2\,(x^3-2x^2-x+2) && \mid \text{ausmulitplizieren der Klammern} \\
&= -2x^3+4x^2+2x-4 && \mid \text{ausmulitplizieren von -2}
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile zeigt die Gewinnfunktion als Polynom.

2.6 Vom Polynom zurück zur Darstellung in Linearfaktoren

Bei Polynomen vom Grad $n \geq 3$ sind Nullstellen zu 'raten' und der entsprechende Linearfaktor ist durch Polynomdivision vom ursprünglichen Polynom abzuspalten. Das entstehende Restpolynom ist – falls möglich – weiter in Linearfaktoren zu zerlegen.

Das 'Raten' gelingt leichter, wenn aus den Vorfaktoren zunächst der größte gemeinsame Teiler (ggT) ausgeklammert wird. Das Vorzeichen des ggT kann so gewählt werden, dass der verbleibende Leitkoeffizient (Faktor vor dem Term mit der höchsten Potenz) anschließend +1 ist.

$$\begin{aligned} G(x) &= -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 && \mid \text{negativer ggT ist -2} \\ &= -2 \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) && \mid \text{ausklammern von -2} \end{aligned}$$

Die Gewinnfunktion wird Null, wenn in der letzten Zeile die Klammer Null wird. D.h. von diesem Polynom in der Klammer ist nun eine Nullstelle zu raten.

Dazu werden die Teiler des konstanten Koeffizienten (hier: +2) mit positivem und negativem Vorzeichen notiert und probiert, ob die Gewinnfunktion Null wird.

Kandidaten für Nullstellen sind also hier die Zahlen: $-1, +1$ sowie $-2, +2$.

Es zeigt sich, dass z.B. -1 eine Nullstelle ist; denn:

$$G(-1) = -2 \cdot \Big((-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2\Big) = 0.$$

Der zu dieser Nullstelle gehörende Linearfaktor lautet: $(x + 1)$.

Wird dieser Linearfaktor durch Polynomdivision abgespalten, so verbleibt ein Restpolynom, von dem weitere Nullstellen zu bestimmen sind.

$$\begin{aligned} G(x) &= -2 \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ &= -2 \cdot (x + 1) \cdot \underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_{\text{Restpolynom}} && \mid \text{nach Polynomdivision} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der pq-Formel können die Nullstellen für das quadratische Restpolynom bestimmt werden. Die fehlenden Nullstellen sind demnach: $x = +1$ und $x = +2$.

Die entsprechenden Linearfaktoren dazu lauten $(x - 1)$ und $(x - 2)$.

Abschließend berechnet sich die Darstellung der Gewinnfunktion in Linearfaktoren:

$$G(x) = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2).$$