Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

4. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms vom Grad $n \geq 3$:
  - Wenn möglich vereinfachen des Polynoms und die einzelnen Terme vom höchsten Grad an absteigend sortieren.
    Bsp.: $G(x) = -4 + x + 4x^2 - 2x^3 + x = -2[x^3 - 2x^2 - x + 2]$
  - 'Raten' einer Nullstelle. Teiler des konstanten Terms sind mögliche, zu prüfende Nullstellen.
    Bsp.: $x_{\mathrm{N1}} = -1$ weil $G(-1) = 0$.
  - Bestimmung des entsprechenden Linearfaktors.
    Bsp.: $(x - x_{\mathrm{N1}}) = (x + 1)$
  - Durchführung der Polynomdivision und Abspalten des Linearfaktors.
    Bsp.: $-2[x^3 - 2x^2 - x + 2] = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 2)$
  - Bestimmung weiterer Nullstellen des Restpolynoms.
    Bsp.: Die Auswertung des Restpolynoms $(x^2 - 3x + 2)$ mit der p, q-Formel führt auf die zwei weiteren Nullstellen $x_{\mathrm{N2}} = +1$ und $x_{\mathrm{N3}} = +2$.
  - Darstellung des Polynoms in Linearfaktoren:
    Bsp.: $G(x) = -2[x^3 - 2x^2 - x + 2] = -2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2))$
- Begriff der Ableitung einer Funktion $f(x)$; verdeutlicht als Steigung der Tangente an einem Punkt x.
- Unterscheidung von Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ und Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
- Definition der Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.
- Bestimmung von Ableitungsregeln mit Hilfe des Differenzenquotienten und der Grenzbetrachtung, dass der Weiteunterschied Δx gegen Null strebt.

2 Beispiel zur Ableitung einer Gewinnfunktion

2.1 Unternehmensbeispiel

Ein Recyclingunternehmen verkauft jeden Monat eine in Tonnen gemessene Gewichtsmenge x an Edelmetall. Von diesem Unternehmen sei die monatliche Kapazitätsgrenze von $x_{max} = 2.5$ Tonnen Edelmetall und die folgende Gewinnfunktion für den Gewinn in Mio. € bekannt:

$$G(x) = -2(x-1)(x+1)(x-2).$$

Gleichwertig zu dieser Gewinnfunktion sind folgende Darstellungen:

$$\begin{aligned} G(x) &= -2(x^2-1)(x-2) && \mid \text{3-tes Binom angewendet} \\ G(x) &= -2x^3+4x^2+2x-4 && \mid \text{Klammern ausmultipliziert} \end{aligned}$$

2.2 Bestimmung der Grenzgewinnfunktion

Die Grenzgewinnfunktion berechnet sich als erste Ableitung der Gewinnfunktion:

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x}.$$

2.2.1 Ableitung der Polynomdarstellung der Gewinnfunktion

Benutzt werden die Regeln: Ableitung einer Konstanten, Ableitung einer Potenzfunktion mit Vorfaktor und Ableitung einer Summe von Termen.

$$\begin{aligned} G'(x) &= [-2x^3+4x^2+2x-4]' \\ G'(x) &= -2\cdot \mathbf{3}x^{(\mathbf{3-1})} + 4\cdot \mathbf{2}x^{(\mathbf{2-1})} + 2\cdot \mathbf{1}x^{(\mathbf{1-1})} \cancel{-4} \\ G'(x) &= -6x^2+8x+2 \end{aligned}$$

2.2.2 Ableitung der zwei Klammerdarstellung der Gewinnfunktion

Wie zuvor werden folgende Regeln zur Ableitung benutzt: Ableitung einer Konstanten, Ableitung einer Potenzfunktion mit Vorfaktor und Ableitung einer Summe von Termen.

Zusätzlich wird die Produktregel zur Ableitung eines Produktes zweier Funktionen verwendet.

$$G'(x) = [\ \underbrace{(-2)}_{=a}\underbrace{(x^2-1)}_{=u(x)}\underbrace{(x-2)}_{=v(x)}\ ]'$$

$$u(x) = (x^2-1) \qquad u'(x) = 2x$$
$$v(x) = (x-2) \qquad v'(x) = 1$$

$$\begin{aligned}
G'(x) &= [a \cdot u \cdot v]' \\
&= a(u' \cdot v + u \cdot v') \\
&= (-2)\Big((2x) \cdot (x-2) + (x^2-1) \cdot (1)\Big) \\
&= (-2)\Big(2x^2 - 4x + x^2 - 1\Big) \\
&= (-2)\Big(3x^2 - 4x - 1\Big) \\
&= -6x^2 + 8x + 2
\end{aligned}$$

2.3 Änderung des Gewinns bei kleiner Änderung der Menge

Das Unternehmen verkauft seit längerer Zeit monatlich eine Menge $x_{\text{IST}} = 1.5$ Tonnen Edelstahl. Dies entspricht einem Gewinn von

$$G(1.5) = -2 \cdot \Big((1.5)^3 - 2(1.5)^2 - (1.5) + 2\Big) = 1.25 \text{ Mio. Euro.}$$

Aus der Vorlesung bekannt ist das Differential:

$$\mathrm{d}G = G'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Das Differential kann für kleine, endliche Differenzen in folgende Näherungsformel überführt werden:

$$\Delta G \approx G'(x)\ \Delta x \qquad \text{(Näherungsformel).}$$

Mit Hilfe dieser Näherungsformel kann die Frage beantwortet werden, um welchen absoluten Betrag sich der Gewinn ändert, wenn sich die verkaufte Menge um einen kleinen absoluten Betrag $x_{\text{IST}} + \Delta x = x_{\text{SOLL}}$ verändert.

Sei beispielsweise $x_{\text{SOLL}} = 1.51$ Tonnen, dann ist

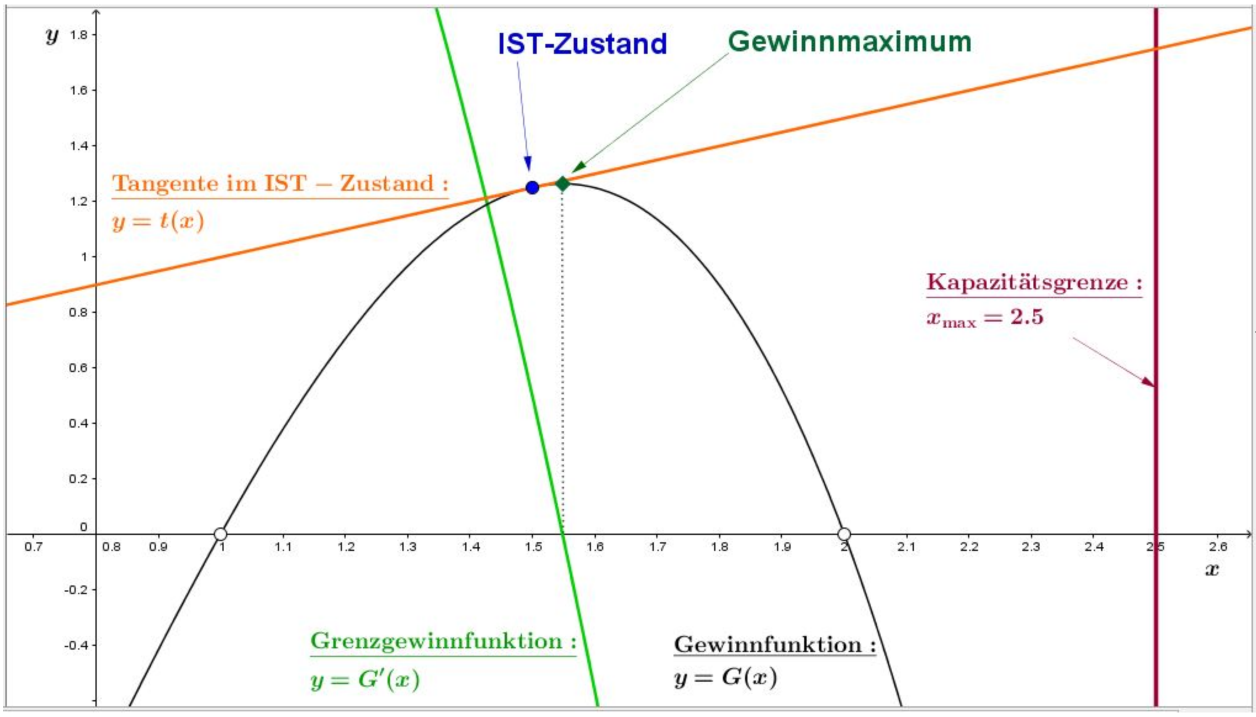
$$\Delta x = x_{\text{SOLL}} - x_{\text{IST}} = 1.51 - 1.50 = 0.01 \text{ Tonnen.}$$

Wird zusätzlich die Steigung $G'(1.5) = \frac{1}{2}$ der Gewinnfunktion bei der verkauften Menge von $x_{\text{IST}} = 1.5$ Tonnen Edelmetall berechnet, dann ist die Gewinnänderung beim Übergang von der IST- zur SOLL-Menge näherungsweise

$$\begin{aligned}\Delta G &= G'(x)\Delta x \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.01 \\ &= 0.005 \text{ Mio. Euro.}\end{aligned}$$

Werden also 10 kg mehr Edelstahl verkauft, steigt der Gewinn um etwa 5000 Euro.

2.4 Grafische Darstellung des Sachverhalts



Aufgetragen ist der Gewinn G des Unternehmens in Mio. € abhängig von der monatlich verkauften Menge Edelmetall x in Tonnen.

Der Graf der Gewinnfunktion $G(x)$ verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Zusätzlich eingezeichnet ist der Graf der Grenzgewinnfunktion $G'(x)$, der für jede verkaufte Menge Edelmetall x das Änderungsverhalten des Gewinns bei kleinen Änderungen dx der verkauften Menge beschreibt.

Eingezeichnet ist auch die derzeitige Verkaufsmenge von $x_{\text{IST}} = 1.5$ Tonnen Edelstahl als 'IST-Zustand' des Unternehmen. Der Gewinn beträgt dabei $G(1.5) = 1.25$ Mio. Euro.

Mit Hilfe der Grenzgewinnfunktion $G'(1.5) = \frac{1}{2}$ kann die Steigung der eingezeichneten Tangente $t(x)$ im 'IST-Zustand' berechnet werden.

Diese Tangente ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$
\begin{aligned}
t(x) &= G(x_0) + G'(x_0)(x - x_0) && \mid \text{vgl. Vorlesung} \\
&= G(x_{\text{IST}}) + G'(x_{\text{IST}})(x - x_{\text{IST}}) && \mid \text{'IST-Zustand'} \\
&= G(1.5) + G'(1.5)(x - 1.5) && \mid x_{\text{IST}} = 1.5 \text{ Tonnen} \\
&= 1.25 + \tfrac{1}{2}(x - 1.5) && \mid \text{Tangentengleichung}
\end{aligned}
$$