Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

5. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Beispielrechnungen zu den Ableitungsregeln.
- Mehrfache Ableitungen am Beispiel einer Gewinnfunktion.
- Deskriptive Beschreibung von Funktionsverläufen:
  - Steigungsverhalten:
    Monotone und streng monotone (fallende / steigende) Funktionen. Unterscheidbar anhand des Vorzeichens der **ersten** Ableitung.
  - Krümmungsverhalten:
    (Streng) konvexe und (streng) konkave Funktionsverläufe. Unterscheidbar anhand des Vorzeichens der **zweiten** Ableitung.
- Extremwert (Maximum oder Minimum) einer Funktion. Bestimmbar anhand der **ersten** Ableitung: $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$.

  Vorzeichen der zweiten Ableitung unterscheidet zwischen Minimum und Maximum.
- Wendepunkt und Sattelpunkt einer Funktion. Kandidaten bestimmbar anhand der **zweiten** Ableitung: $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$.

  Ist bspw. bei Polynomen vom Grad $n = 3$ der Wert der dritten Ableitung an der Stelle ungleich Null, handelt es sich um einen Wendepunkt. Es ist sogar ein Sattelpunkt, wenn zusätzlich die erste Ableitung an der Stelle Null ist.
- Begriff der Elastizität ϵ als Verhältnisgröße zwischen relativer Änderung der Eingangsgröße (bspw. Menge $\frac{\Delta x}{x}$) und Ausgangsgröße (bspw. Gewinn $\frac{\Delta G}{G}$).

2 Kurvendiskussion

Für ein Recyclingunternehmen mit der monatlichen Kapazitätsgrenze von $x_{max} = 2.5$ Tonnen Edelmetall wurde die Kostenfunktion

$$K(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{25}{4}.$$

als Modell für die monatlichen Gesamtkosten in Mio. Euro identifiziert.

Die folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit der genaueren mathematischen und ökonomischen Analyse dieser Kostenfunktion.

2.1 Definitions- und Wertebereich

Aufgrund der Kapazitätsbeschränkung und weil die Menge Edelmetall ausschließlich positive Werte annehmen kann, dürfen nur Werte aus dem Intervall $x \in [0, 2.5]$ in die Kostenfunktion eingesetzt werden.

Somit lautet der Definitionsbereich der Kostenfunktion in Mengenschreibweise:

$$D_K = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2.5\}.$$

Da die Kosten in der betrieblichen Praxis stets als positiv angesehen werden, ist der Wertebereich W_K der Kostenfunktion zunächst gegeben durch alle reellen Werte größer als Null:

$$W_K = \mathbb{R}^+.$$

Die Kosten sind aber in der Realität unternehmensindividuell beschränkt. Z.B. durch die von einem Unternehmen maximal tragbaren Kosten, die sich u.a. an der verfügbaren Kapitaldecke des Unternehmens orientieren.

2.2 Berechnung aller benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned}
K(x) &= x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{4}x + \tfrac{25}{4} \\
K'(x) &= 3x^2 - 6x + \tfrac{9}{4} \\
K''(x) &= 6x - 6 \\
K'''(x) &= 6 \\
K''''(x) &= 0
\end{aligned}$$

2.3 Achsenabschnitt

Der Schnittpunkt des Grafen der Kostenfunktion mit der y-Achse beziffert die fixen Kosten, wenn also keine Tonne Edelmetall ($x = 0$) verkauft wird: $y_{\text{Abschnitt}} = K(0) = K_{\text{fix}} = \frac{25}{4}$.

2.4 Nullstellen

Die Nullstellen sind anhand der Kostenfunktion mit der Bedingung $K(x) \overset{!}{=} 0$ zu bestimmen.

Für die Kostenfunktion lässt sich eine Nullstelle bei $x_{\mathrm{N1}} = -1$ raten, denn es ist $K(-1) = 0$. Der zu dieser Nullstelle gehörende Linearfaktor lautet: $(x + 1)$.

Wird dieser Linearfaktor durch Polynomdivision abgespalten, so verbleibt ein Restpolynom, von dem mögliche weitere Nullstellen zu bestimmen sind.

2.4.1 Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 3x^2 \;+ \frac{9}{4}x + \frac{25}{4}\right) : \left(x+1\right) = x^2 - 4x + \frac{25}{4} \\
\underline{-\,x^3 \;\; - x^2} \\
\qquad\quad -\,4x^2 \;+ \frac{9}{4}x \\
\qquad\quad \underline{\;\;4x^2 \;+ 4x} \\
\qquad\qquad\qquad \frac{25}{4}x + \frac{25}{4} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\,\frac{25}{4}x - \frac{25}{4}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Restpolynom: $R(x) = x^2 - 4x + \frac{25}{4}$.

2.4.2 *pq*-Formel

Werden $p = -4$ und $q = +\frac{25}{4}$ des Restpolynoms in die *pq*-Formel eingesetzt, so lassen sich möglicherweise zwei weitere Nullstellen berechnen.

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{N2,\,N3}} &= -\tfrac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4}} \\
&= 2 \pm \sqrt{-\tfrac{9}{4}} \\
&= 2 \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck $\sqrt{-1}$ hat in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ keine Lösung. D.h. es gibt keine weiteren reellen Nullstellen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die Kostenfunktion nur eine Nullstelle bei $x = -1$ besitzt. Diese liegt außerhalb des Definitionsbereichs und ist daher im Folgenden für weitere ökonomische Analysen ohne Bedeutung.

2.5 Extrema

Extrema sind Hoch- oder Tiefpunkte im Verlauf des Grafen einer Funktion. Sie sind bestimmbar anhand der **ersten** Ableitung durch die Forderung: $K'(x) \overset{!}{=} 0$.

Der Wert der zweiten Ableitung an der Extremalstelle unterscheidet zwischen Minimum ($K'' > 0$) und Maximum ($K'' < 0$), oder deutet auf einen Sattelpunkt hin ($K'' = 0$).

Mögliche Extremalstellen der Kostenfunktion:

$$\begin{aligned} K'(x) &= 3x^2 - 6x + \tfrac{9}{4} \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \qquad 0 &= x^2 - 2x + \tfrac{3}{4} \qquad \mid \text{nach Division durch 3} \end{aligned}$$

Werden $p = -2$ und $q = +\frac{3}{4}$ des quadratischen Polynoms in die pq-Formel eingesetzt, so lassen sich möglicherweise zwei Nullstellen der ersten Ableitung der Kostenfunktion berechnen, die Extremwerte der Kostenfunktion darstellen können.

$$\begin{aligned} x_{\text{E1, E2}} &= -\tfrac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-2}{2}\right)^2 - \tfrac{3}{4}} \\ &= 1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} \\ &= 1 \pm \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile liefert $x_{\text{E1}} = \frac{1}{2}$ und $x_{\text{E2}} = \frac{3}{2}$ mit den zugehörigen Funktionswerten $y_{\text{E1}} = K(x_{\text{E1}}) = K(\frac{1}{2}) = 6\frac{3}{4}$ und $y_{\text{E2}} = K(x_{\text{E2}}) = K(\frac{3}{2}) = 6\frac{1}{4}$.

Extremalpunkte sind also:

$$\begin{aligned} \text{E1}: &\quad (\tfrac{1}{2}, 6\tfrac{3}{4}) \\ \text{E2}: &\quad (\tfrac{3}{2}, 6\tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

<u>Bemerkung:</u> Beide Extremalstellen liegen innerhalb des Definitionsbereichs und sind somit für weitere betriebswirtschaftliche Analysen des Recyclingunternehmens relevant. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass in der betrieblichen Praxis die Kostenfunktion als monoton wachsend angenommen wird, können Extrema darauf hindeuten, dass das Modell der Kosten des Unternehmens noch nicht korrekt angepasst worden ist. Eine Überprüfung und Plausibilisierung der Kostenfunktion ist somit in der Praxis angezeigt.

2.5.1 Minima und Maxima

Die Unterscheidung zwischen Minima und Maxima gelingt durch Einsetzen der berechneten Extremalwerte in die zweite Ableitung der Kostenfunktion.

$$\begin{aligned} K''(x_{\text{E1}}) &= K''(\tfrac{1}{2}) = -3 < 0 \qquad \Rightarrow \text{MAX} \\ K''(x_{\text{E2}}) &= K''(\tfrac{3}{2}) = +3 > 0 \qquad \Rightarrow \text{MIN} \end{aligned}$$

2.5.2 Sattelpunkt

Da für keinen x-Wert die erste und zweite Ableitung der Kostenfunktion gleichzeitig Null wird, besitzt der Graf der Funktion keinen Sattelpunkt.

2.5.3 Steigungsverhalten

Das Steigungsverhalten kann anhand des Vorzeichens der ersten Ableitung der Kostenfunktion ermittelt werden.

Weil kein Sattelpunkt vorliegt, wechselt an den zuvor berechneten Extremalstellen E1 und E2 das Vorzeichen der ersten Ableitung, somit sind drei Bereiche für die Werte von $x \in D_K$ zu untersuchen:

Fall 1	0	$<$	x	$<$	x_{E1}	:	$K'(x)$	$>$	0	$\Rightarrow$ streng monoton steigend
Fall 2	x_{E1}	$<$	x	$<$	x_{E2}	:	$K'(x)$	$<$	0	$\Rightarrow$ streng monoton fallend
Fall 3	x_{E2}	$<$	x	$<$	$x_{\max}$	:	$K'(x)$	$>$	0	$\Rightarrow$ streng monoton steigend

Fall 2 im Detail: Intervalle im Definitionsbereich D_K in denen der Funktionsverlauf (streng) monoton fallend ist, werden mit der Forderung $K'(x) \overset{!}{<} 0$ berechnet:

$$\begin{aligned}
K'(x) &\overset{!}{<} 0 \\
3x^2 - 6x + \tfrac{9}{4} &< 0 \\
x^2 - 2x + \tfrac{3}{4} &< 0 && \mid \text{Division durch 3} \\
(x-1)^2 - \tfrac{1}{4} &< 0 && \mid \text{quadr. Ergänzung u. 2.tes Binom rückwärts} \\
\mid x - 1 \mid &< \tfrac{1}{2} && \mid \text{Plus } \tfrac{1}{4} \text{ u. Wurzel ziehen u. Betragsstriche setzen}
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der letzten Zeile, vgl. zur Berechnung die erste Vorlesung, ist das oben für den Fall 2 beschriebene Gebiet: $\mathbb{L} = \left\{ x \in D_K \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \right\}$.

2.6 Wendepunkte

An den Wendepunkten ändert sich das Krümmungsverhalten des Grafen der Funktion. Wendepunkte sind anhand der **zweiten** Ableitung durch die Forderung: $K''(x) \overset{!}{=} 0$ bestimmbar.

Für die vorliegende zweite Ableitung der Kostenfunktion, vgl. Abschnitt 2.2, berechnet sich mit dieser Forderung der einzig mögliche Wendepunkt zu $x_{\mathrm{W}} = 1$; weil dann gilt $K''(1) = 0$.

Der zugehörige Funktionswert wird durch Einsetzen in die Kostenfunktion berechnet:
$y_{\mathrm{W}} = K(x_{\mathrm{W}}) = K(1) = 6\frac{1}{2}$.

Da die dritte Ableitung der Kostenfunktion ($K''' = 6$) konstant positiv und nicht Null ist, handelt es sich tatsächlich um einen Wendepunkt mit den Koordinaten:

$$\mathrm{W}: \qquad (1, 6\tfrac{1}{2})$$

Bemerkung: Der Wendepunkt der Kostenfunktion wird in manchen Literaturquellen auch als Kostenkehre bezeichnet.

2.6.1 Sattelpunkt

Vgl. auch Abschnitt 2.5.2. Erste und zweite Ableitung der Kostenfunktion werden für kein x gleichzeitig Null, d.h. der obige Wendepunkt ist kein Sattelpunkt. Probe: $K'(1) = -\frac{3}{4} \neq 0$.

2.6.2 Krümmungsverhalten

Die Krümmung kann anhand des Vorzeichens der zweiten Ableitung ermittelt werden.

Der oben berechnete Wendepunkt unterteilt den Definitionsbereich D_K in zwei Bereiche mit unterschiedlicher Krümmung:

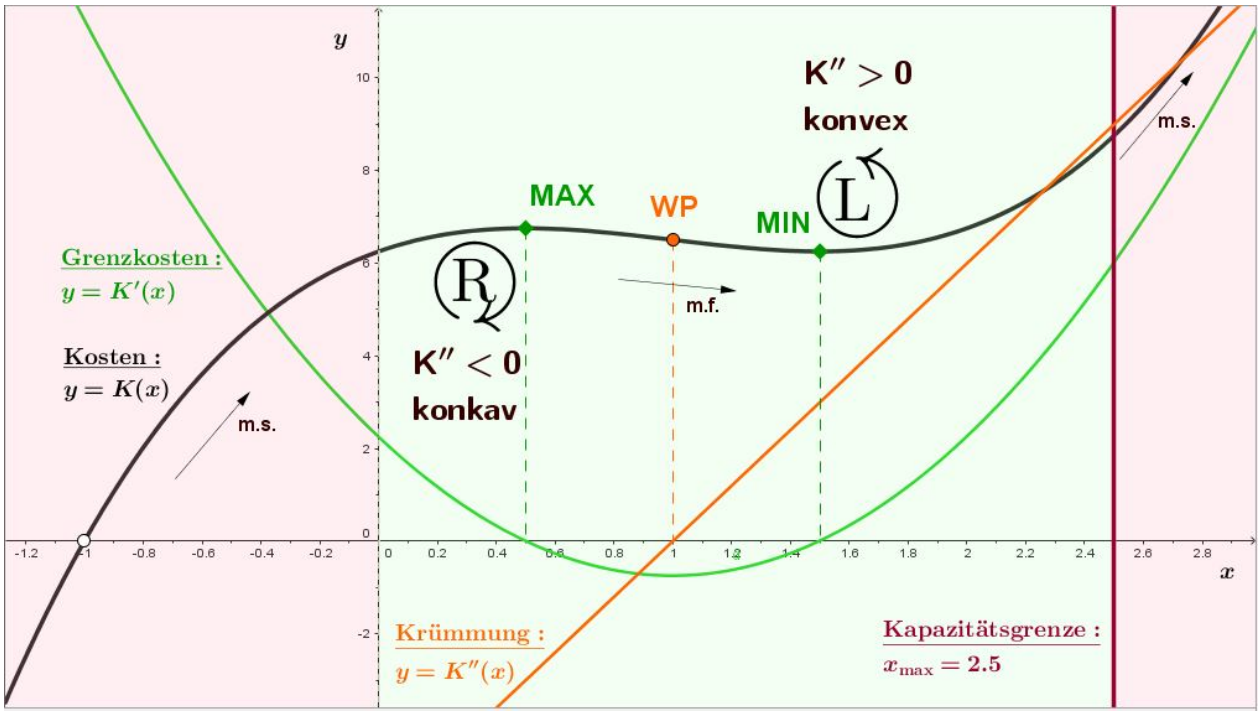
Fall 1	$0 < x < x_{\mathrm{W}} \quad : \quad K''(x) < 0$		$\Rightarrow$ streng konkav
Fall 2	$x_{\mathrm{W}} < x < x_{\max} \quad : \quad K''(x) > 0$		$\Rightarrow$ streng konvex

2.7 Asymptoten und Definitionslücken

2.7.1 Asymptote

Das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$ wird durch den Term mit der höchsten Potenz in der Kostenfunktion bestimmt und entspricht hier dem Term: x^3.

2.7.2 Definitionslücken

In diesem Beispiel ist die Kostenfunktion $K(x)$ keine gebrochenrationale Funktion, daher sind keine Definitionslücken vorhanden.

2.8 Skizze der Kostenfunktion