Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

HOCHSCHULE FRESENIUS
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Lineare Algebra und Analysis

6. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Ausführliche Kurvendiskussion am Beispiel der Kostenfunktion: $K(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{25}{4}$.
- Berechnung und Anwendung der Elastizität ϵ (gr.: epsilon) an verschiedenen Beispielen.

  Berechnung der Elastizität $\epsilon_{x,p}$ und Klassifizierung von Elastizitätsbereichen (vollkommen elastisch, elastisch, proportional elastisch, unelastisch und vollkommen unelastisch) am Beispiel einer linearen Nachfragefunktion $x(p)$.
- Einführung der Stammfunktion F als Integral[1] von einer Funktion f.
  - Geometrische Verdeutlichung der Stammfunktion als Fläche unter dem Graph der Funktion f über einem bestimmten Abschnitt $[a, b]$ der x-Achse.
  - Verdeutlichung einfacher Regeln: Stimmen Ober- und Untergrenze überein ($a = b$), so ist die Fläche unter f Null, das Vertauschen von Ober- und Untergrenze führt zum gleichen Wert des Integrals allerdings mit umgedrehtem Vorzeichen, Integrale lassen sich stückweise über dem Intervall $[a, b]$ berechnen.
  - Berechnung der Stammfunktion $F(x)$ einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ durch Integration:
  $$\boxed{F(x) = \int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} + c.}$$
  Beispiel:
  $$F(x) = \int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(2+1)} x^{2+1} + c.$$
  - Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so auch jede neue Funktion $\tilde{F}(x) = F(x) + c$ die durch Addition einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ entsteht. Probe: Ableitung beider Stammfunktionen führt zum selben Ausdruck $f(x) = F'(x) = \tilde{F}'(x)$.

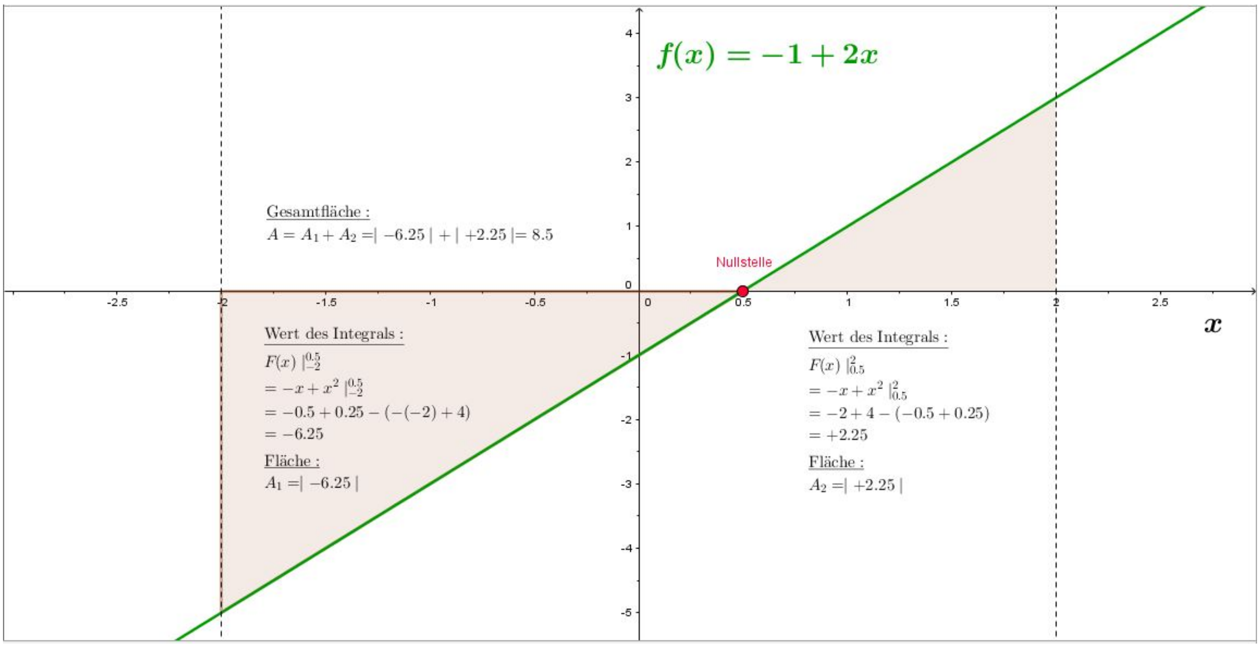
[1] In manchen Literaturen als Gegenoperation zur *Ableitung* auch mit dem Begriff *Aufleitung* bezeichnet.

2 Fläche zwischen x-Achse und Graph von f

Um in einem Intervall $[a, b]$ die Flächen zwischen x-Achse und dem Graphen der Funktion f zu berechnen sind zunächst die Nullstellen von f in dem Intervall zu bestimmen. Dann ist die Integration stückweise zwischen den Nullstellen durchzuführen. Es ist jeweils der Betrag des Wertes des Integrals als Flächenmaßzahl zu nehmen. Die Gesamtfläche ergibt sich als Addition aller Flächenmaßzahlen.

Beispiel aus der Vorlesung: $f(x) = -1 + 2x$ mit Nullstelle bei $x_N = 0.5$. Es soll die Fläche im Intervall $[-2, 2]$ berechnet werden.

Grafische Darstellung des Sachverhalts und Berechnung:



3 Fläche zwischen zwei Graphen f und g

Ist die Fläche zwischen zwei Graphen f, g innerhalb eines Intervalls $[a, b]$ zu berechnen, so wird zunächst das Integral von f und dann das Integral von g berechnet. Beide Integrale werden von einander subtrahiert.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Da die Integrale über dem gleichen Intervall berechnet werden, vereinfacht sich die Darstellung:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Je nachdem ob f über g oder darunter verläuft, wechselt das Vorzeichen des entsprechenden Beitrages zum Wert des Integrals. Zunächst sind also für eine Flächenbestimmung die Schnittpunkte der beiden Graphen zu berechnen und dann ist die Integration stückweise zwischen den Schnittpunkten durchzuführen. Anschließend ist jeweils der Betrag des Wertes des Integrals als

Flächenmaßzahl zu nehmen. Die Gesamtfläche ergibt sich als Addition aller Flächenmaßzahlen.

Beispiel aus der Vorlesung: $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -x + 11$ mit Schnittpunkten bei $x_{S1} = -4$ und $x_{S2} = +3$. Es soll die Fläche zwischen den Funktionen im Intervall $[-5, 5]$ berechnet werden.

<u>Ansatz:</u>

$$\begin{aligned}\int (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^2 - 1 - (-x + 11)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x^2 + x - 12\right)\mathrm{d}x. \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + c \qquad \text{(allg. Stammfunktion)}\end{aligned}$$

Die allgemeine Stammfunktion ist nun zur Flächenberechnung stückweise zwischen den zwei Schnittpunkten auszuwerten, vgl. die weitere Rechnung im Detail in der Vorlesung und in folgender Grafik.

<u>Grafische Darstellung des Sachverhalts und Berechnung:</u>