Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

7. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Beispielrechnungen zur Integration von Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ und Polynomen.
- Einführung der Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ als Stammfunktion von $f(x)$. (Anwendungsbeispiel in der Statistik: Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion.)
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Ableitung der Integralfunktion $F(x)$ nach der oberen Grenze und Herstellung des Zusammenhangs $F'(x) = f(x)$.
- Begriff des sich einstellenden Marktgleichgewichts zwischen Angebot und Nachfrage zu einem Produkt.

  Die Berechnung erfolgt über den Schnittpunkt von Preis-Absatz-Funktion $p_N(x_N)$ und Preis-Angebots-Funktion $p_A(x_A)$.

  D.h. also, die Gleichgewichtsmenge x_0 bestimmt sich durch Auswertung von $p_N(x_0) = p_A(x_0)$. Der Gleichgewichtspreis ist dann gegeben durch $p_0 = p_N(x_0)$ oder $p_0 = p_A(x_0)$.
- Berechnung der Konsumenten- und Produzentenrente durch geeignete Integration im p, x-Diagramm (Preis-Mengen-Diagramm).
- Einführung von Funktionen mehrerer Veränderlicher, bspw. $f(x, y)$.

  Verdeutlichung und Berechnung von Niveaulinien (Indifferenzkurven, Isoquanten):
  $c = f(x, y)$ beschreibt die Niveaulinie von $f(x, y)$ zum konstanten Niveau $c \in \mathbb{R}$.
- Begriff der Homogenität und des Grades r der Homogenität einer Funktion.

  Für Funktionen von zwei Veränderlichen:
  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\mathbf{r}}\, f(x, y)$ ist homogen vom Grad **r** für jeden Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 Homogenität - Beispiel aus der Vorlesung

Auf Homogenität zu untersuchen sei die Funktion:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 4\,x_2^2\,x_3 - 5\sqrt{x_1^3\,x_2^2\,x_3} \\ &= 4\,x_2^2\,x_3 - 5\,x_1^{\frac{3}{2}}\,x_2\,x_3^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Potenzregeln!)} \end{aligned}$$

Die Untersuchung beginnt mit der Multiplikation jeder Variablen mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) &= 4\,(\lambda x_2)^2\,(\lambda x_3) - 5\,(\lambda x_1)^{\frac{3}{2}}\,(\lambda x_2)\,(\lambda x_3)^{\frac{1}{2}} && |\text{ mit Klammern eingefügt} \\ &= 4\,\lambda^2 x_2^2\,\lambda x_3 \quad - 5\,\lambda^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{2}}\,\lambda x_2\,\lambda^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}} && |\text{ Potenzen ausrechnen} \\ &= \lambda^3\,4\,x_2^2\,x_3 \quad - \lambda^{\frac{6}{2}}\,5\,x_1^{\frac{3}{2}}\,x_2\,x_3^{\frac{1}{2}} && |\text{ Faktor } \lambda \text{ zusammenfassen} \\ &= \lambda^3\left[4\,x_2^2\,x_3 \quad - 5\,x_1^{\frac{3}{2}}\,x_2\,x_3^{\frac{1}{2}}\right] && |\text{ Faktor } \lambda \text{ ausklammern} \\ &= \lambda^{\mathbf{3}} \quad f(x_1,x_2,x_3) && |\text{ Grad } \mathbf{r} \text{ bestimmen} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Funktion $f(x_1,x_2,x_3)$ ist homogen vom Grad $\mathbf{r} = \mathbf{3}$.

3 Partielle Ableitungen

Notation: Zur Vereinfachung der Formeln, werden in manchen Literaturen für die partielle Ableitung folgende abkürzende Schreibweisen synonym verwendet:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{d}_x f = f_x.$$

Die letzte Schreibweise f_x wird im Folgenden als Abkürzung für die partielle Ableitung nach x genutzt; f_y entsprechend für die partielle Ableitung nach y.

3.1 Beispiel 4 aus der Vorlesung

Zu bestimmen sind alle einfachen partiellen Ableitungen der Funktion:

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+3y^2+xy} = \frac{u(x,y)}{v(x,y)}.$$

Von f sind also die partiellen Ableitungen f_x und f_y gesucht. Die Funktion f ist eine gebrochenrationale Funktion. Es sind somit die Ableitungen mit der Quotientenregel[1] zu bilden.

[1]Erinnerung Quotientenregel:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Liste der Ableitungen:

Funktionen				partielle Ableitungen	
Zähler:	$u(x,y)$	$=$	1	$u_x = 0$	$u_y = 0$
Nenner:	$v(x,y)$	$=$	$x^2 + 3y^2 + xy$	$v_x = 2x + y$	$v_y = 6y + x$

Anwendung der Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
f_x &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{u}{v}\right) &= \tfrac{u_x v - u v_x}{v^2} &= -\tfrac{2x+y}{(x^2+3y^2+xy)^2} \\
f_y &= \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{u}{v}\right) &= \tfrac{u_y v - u v_y}{v^2} &= -\tfrac{6y+x}{(x^2+3y^2+xy)^2}
\end{aligned}
$$

3.2 Beispiel 6 aus der Vorlesung

Zu bestimmen sind alle einfachen partiellen Ableitungen der Funktion:

$$g(x,y) = e^{3x^2+x-y} = u(v(x,y)).$$

Von g sind also die partiellen Ableitungen g_x und g_y gesucht. Es handelt sich bei g um eine verkettete Funktion, somit ist die Kettenregel[2] zu nutzen.

Liste der Ableitungen:

Funktionen				Ableitungen	
Äußere Funktion:	$u(v)$	$=$	e^v	$u_v = e^v$	
Innere Funktion:	$v(x,y)$	$=$	$3x^2 + x - y$	$v_x = 6x + 1$	$v_y = -1$

Anwendung der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
g_x &= \tfrac{\partial}{\partial x}[u(v(x,y))] &= u_v \cdot v_x &= e^v \cdot (6x+1) &= e^{3x^2+x-y} \cdot (6x+1) \\
g_y &= \tfrac{\partial}{\partial y}[u(v(x,y))] &= u_v \cdot v_y &= e^v \cdot (-1) &= -e^{3x^2+x-y}
\end{aligned}
$$

[2]Erinnerung Kettenregel:

$$(u(v(x))' = u'(v) \cdot v'(x).$$