DOZENT:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

LINEARE ALGEBRA UND ANALYSIS

8. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Beispielrechnung zur Analyse der Homogenität einer Funktion mehrerer Veränderlicher.
- Einführung der partiellen Ableitung[1] einer Funktion mit mehreren Argumenten nach **einem** dieser Argumente (Richtungsableitung). Die Werte der übrigen Argumente werden dabei festgehalten. Bsp.: $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
  Partielle Ableitung nach x: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x$ und partielle Ableitung nach y: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y$.
- Einführung der zweiten partiellen Ableitung einer Funktion mehrerer Argumente nach einem dieser Argumente oder nach einander nach verschiedenen Argumenten.
  Bsp.: $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
  Zweifache partielle Ableitungen: $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 1$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 1$ und $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$.
- Besprechung des totalen Differentials $\mathrm{d}f$ als Summe aller mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ gewichteten, totalen Veränderungen $\mathrm{d}x_i$.
- Definition des Gradienten ∇f als Spaltenvektor aller partiellen Ableitungen.
  Bsp.: Für $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ ist der Gradient $\nabla f = \binom{x}{y}$.
- Konstruktion der Hessematrix $\boldsymbol{H}_f(x,y)$ und Berechnung der Determinante $\det \boldsymbol{H}_f(x,y)$.
- Notwendige ($\nabla f \stackrel{!}{=} \vec{0}$) und hinreichende Bedingungen ($\det \boldsymbol{H} > 0$) für lokale Extrema einer Funktion $f(x,y)$. Unterscheidung Minimum ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$), Maximum ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$) und Sattelpunkte ($\det \boldsymbol{H} < 0$). Nicht entscheidbar, wenn $\det \boldsymbol{H} = 0$ gilt.
  Der Gradient $\nabla f = \binom{x}{y}$ des Beispiels $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ entspricht dem Nullvektor im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.
  Die Hessematrix ist in diesem Beispiel für alle Punkte (x,y) konstant $\boldsymbol{H}_f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und hat die Determinante $\det \boldsymbol{H} = 1 > 0$. Da der erste Matrixeintrag zudem auch positiv ist, handelt es sich um ein Minimum der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

[1] Das Ableitungssymbol ∂ der partiellen Ableitung erinnert an das d der totalen Ableitung.

2 Cobb-Douglas-Funktion - Beispiel aus der Vorlesung

Es wird die nachfolgende Cobb Douglas Funktion untersucht

$$f(x, y) = 5\, x^{0.2} y^{0.8}.$$

2.1 Homogenität

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 5\, (\lambda x)^{0.2}\, (\lambda y)^{0.8} && \mid \lambda \text{ in Klammern eingefügt} \\ &= 5\, \lambda^{0.2} x^{0.2}\, \lambda^{0.8} y^{0.8} && \mid \text{Potenzen ausrechnen} \\ &= \lambda^{0.2+0.8}\, \underbrace{5\, x^{0.2}\, y^{0.8}} && \mid \text{Faktor } \lambda \text{ zusammenfassen} \\ &= \lambda^{\mathbf{1}}\quad f(x, y) && \mid \text{Grad } \mathbf{r} \text{ bestimmen} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Funktion $f(x, y)$ ist homogen vom Grad $\mathbf{r} = \mathbf{1}$.

2.2 Höhenlinien

Für ein beliebiges, vorgegebenes Niveau $c \in \mathbb{R}^+$ kann die Höhenlinie von $f(x, y)$ berechnet und in einem xy-Koordinatensystem eingezeichnet werden.

Dazu wird die Funktion $f(x, y)$ **gleich** dem Niveau c gesetzt und die entstehende Gleichung nach y aufgelöst:

$$\begin{aligned} c &= f(x, y) \\ &= 5\, x^{0.2} y^{0.8} && \mid : 5 \qquad \cdot \tfrac{1}{x^{0.2}} \qquad (\;)^{\frac{1}{0.8}} \\ \left(\frac{c}{5\, x^{0.2}}\right)^{\frac{1}{0.8}} &= y && \mid \text{Potenzenregeln anwenden und umsortieren} \\ y &= \left(\frac{c}{5}\right)^{1.25} \quad x^{-0.25} && \mid \text{Formel für Höhenlinien} \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel: Für das Niveau $c = 5$ hat die Höhenlinie im xy-Koordinatensystem die einfache Gleichung $y = x^{-0.25}$. Bemerkung: In den Grafiken in Abschnitt 2.6 sind die Höhenlinien mit $y = h(x)$ bezeichnet.

2.3 Einfache partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 5 \cdot 0.2 \cdot\; x^{0.2-1}\; y^{0.8} \\ &= x^{-0.8} y^{+0.8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 5 \cdot 0.8 \cdot\; x^{+0.2}\; y^{0.8-1} \\ &= 4\, x^{+0.2} y^{-0.2} \end{aligned}$$

Die Zusammenfassung der einfachen partiellen Ableitungen zu einem Vektor liefert den Gradienten der Funktion:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-0.8} y^{+0.8} \\ 4\, x^{+0.2} y^{-0.2} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Für keinen Punkt (x, y) kann der Gradient der Nullvektor sein. D.h. die Funktion $f(x, y)$ besitzt kein lokales Extremum oder Sattelpunkt.

Anwendungsbeispiel: Für $P = (x_0, y_0) = (1, 1)$ hat der Gradient die Gestalt: $\nabla f = \binom{1}{4}$.

Wird der Punkt P im xy-Koordinatensystem eingezeichnet, so kann von diesem Punkt aus der Gradient als Vektor abgetragen werden, vgl. die Abbildungen in Abschnitt 2.6.

Der Gradienten zeigt dabei in diejenige Richtung vom Punkt P aus, in welcher die Funktion $f(x, y)$ die stärkste Zunahme erfährt.

2.4 Zweifache partielle Ableitungen

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -0.8\ x^{-1.8}\ y^{+0.8}$	$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = +0.8\ x^{-0.8}\ y^{-0.2}$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = +0.8\ x^{-0.8}\ y^{-0.2}$	$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -0.8\ x^{+0.2}\ y^{-1.2}$

Die Zusammenfassung der zweifachen partiellen Ableitungen zu einer Matrix liefert die Hessematrix der Funktion:

$$\boldsymbol{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -0.8\ x^{-1.8}\ y^{+0.8} & +0.8\ x^{-0.8}\ y^{-0.2} \\ +0.8\ x^{-0.8}\ y^{-0.2} & -0.8\ x^{+0.2}\ y^{-1.2} \end{pmatrix}.$$

Anwendungsbeispiel: Für den Punkt $P : (x_0, y_0) = (1, 1)$ berechnet sich der Wert der zweifachen partiellen Ableitung nach x wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} &= -0.8\ (1)^{-1.8}\ (1)^{+0.8} \\ &= -0.8. \end{aligned}$$

Im Punkt P hat die Hessematrix insgesamt die Form:

$$\boldsymbol{H}_f(1, 1) = \begin{pmatrix} -0.8 & +0.8 \\ +0.8 & -0.8 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Hessematrix im Punkt P berechnet sich zu:

$$\det \boldsymbol{H}_f(1, 1) = (-0.8) \cdot (-0.8) - (+0.8) \cdot (+0.8) = 0$$

2.5 Partielle Elastizitäten

$$\begin{aligned} \epsilon_{f,x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{f(x,y)} &= x^{-0.8}y^{+0.8}\frac{x^1}{5\ x^{0.2}y^{0.8}} &= 0.2 \quad \text{vgl. Exponent von } x \text{ in } f(x,y)! \\ \epsilon_{f,y} &= \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{f(x,y)} &= 4\ x^{0.2}y^{-0.2}\frac{y^1}{5\ x^{0.2}y^{0.8}} &= 0.8 \quad \text{vgl. Exponent von } y \text{ in } f(x,y)! \end{aligned}$$

Cobb-Douglas Besonderheit: Die partiellen Elastizitäten sind konstant für alle x und y Werte.

2.6 Grafische Darstellungen

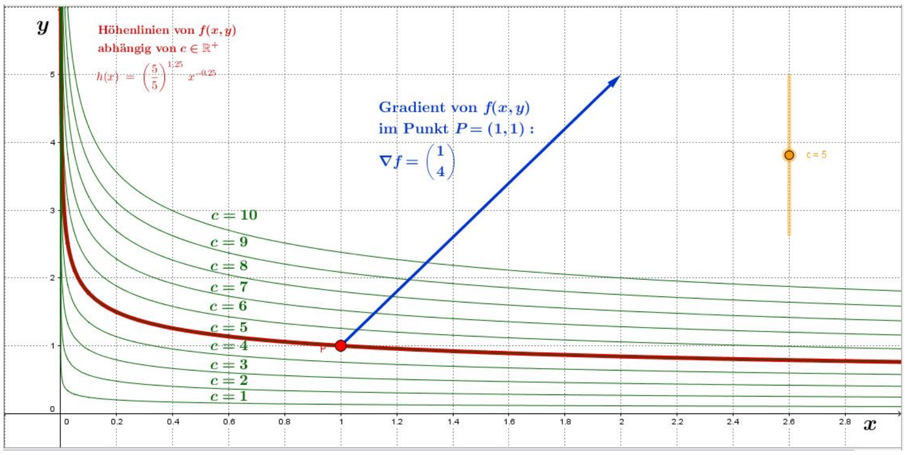

Abbildung 1: Die Grafik zeigt verschiedene Höhenlinien von $f(x, y)$ abhängig von dem gewählten Niveau c. Hervorgehoben ist die Höhenlinie zum Niveau $c = 5$ durch den Punkt $P = (1, 1)$. Zusätzlich eingezeichnet ist der Gradient im Punkt P. Die y-Achse ist hier gestaucht.

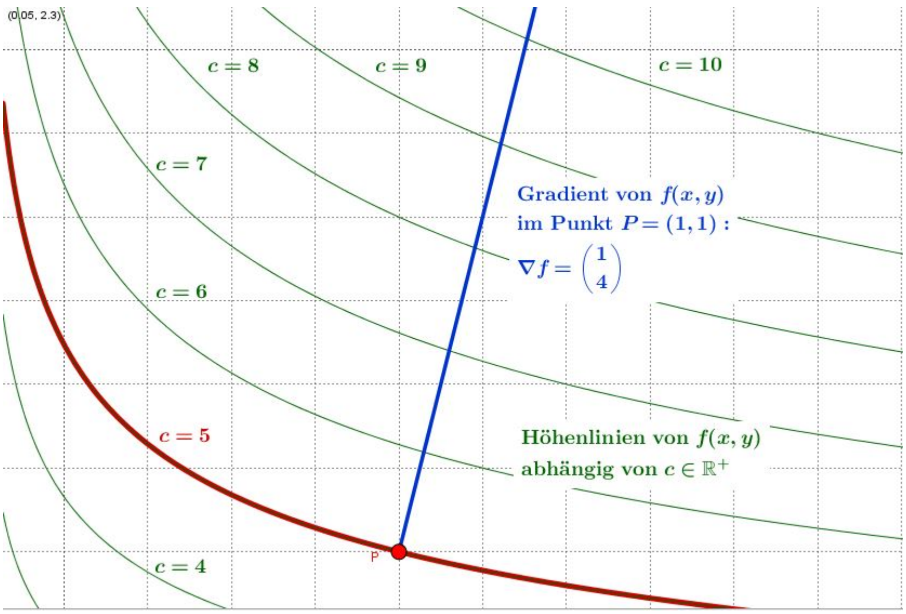

Abbildung 2: Die Grafik zeigt die Umgebung des Punktes P in einer Vergrößerung. Außerdem wurden für die x und y-Achse gleiche Einheiten genutzt, sodass nun die Richtung des steilsten Anstiegs entlang des Gradienten ∇f auch optisch überprüft werden kann.