Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann

Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

10. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Wiederholung multidimensionale Analysis inkl. Beispielrechnungen:
  - Höhenlinien
  - Homogenität
  - Lokale Extrema / Sattelpunkte (Anwendung: Optimierung ohne Nebenbedingungen)
  - Partielle Elastizität
  - Lagrange-Ansatz (Anwendung: Optimierung mit Nebenbedingungen)
- Einführung der *Cramerschen Regel* als Lösungsschema für lineare Gleichungssysteme. In Beispielrechnungen verdeutlicht an mehreren linearen 2×2 Gleichungssystemen[1].
- Definition der erweiterten Koeffizientenmatrix. Einführung von Vektoren und Matrizen. Berechnung der Determinante einer 2×2 Matrix.
- Untersuchung der Lösbarkeit von linearen 2×2 Gleichungssystemen anhand der bei der Cramerschen Regel genutzten Matrizen und deren Determinanten; inkl. geometrische Interpretation im xy-Koordinatensystem.
- Beispiel eines 4×4 linearen Gleichungssystem zur Leistungsverflechtung in einem Unternehmen (Rechnungswesen), vgl. auch Abschnitt 2.
- Verallgemeinerte Darstellung von linearen Gleichungssystemen: $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Mit Koeffizientenmatrix[2] $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und Vektoren $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

[1] Der Ausdruck 2×2 System wird gesprochen als „2 Kreuz 2 System“. Analog: $m \times n$ wird gesprochen „m Kreuz n“.

[2] Reelle Vorfaktoren des linearen Gleichungssystems als Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten. Bei der Bezeichnung erst die Zeilenzahl m nennen und dann die Spaltenzahl n. Merkregel: *Zeile vor Spalte!*.

2 Cramersche Regel - Anwendungsbeispiel

Betrachtet wird noch einmal im Detail die Leistungsverflechtung der beiden Hilfskostenstellen im Beispiel aus der Vorlesung. Die Zuordnung der Kosten war über folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &= 500 + 0.3\, x_2 \\ x_2 &= 400 + 0.2\, x_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Gesucht sind die Kosten x_1 und x_2 der beiden Hilfskostenstellen.

2.1 Sortieren des Gleichungssystems

Alle gesuchten Größen auf die linke Seite bringen und in der Reihenfolge ihrer Indizes sortieren und – wenn erforderlich – fehlenden Vorfaktor „1“ ergänzen:

$$\begin{array}{rcrcl} 1\, x_1 & - & 0.3\, x_2 & = & 500 \\ -0.2\, x_1 & + & 1\, x_2 & = & 400. \end{array} \tag{2}$$

2.2 Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -0.3 & 500 \\ -0.2 & 1 & 400 \end{array}\right)$$

2.3 Untersuchung der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.3 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det \boldsymbol{A} = 1 \cdot 1 - (-0.2) \cdot (-0.3) = 0.94 \neq 0$$

Weil die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist, ist das lineare Gleichungssystem (1) eindeutig lösbar.

2.4 Untersuchung der Matrix $\boldsymbol{B}_1$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & -0.3 \\ 400 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det \boldsymbol{B}_1 = 620$$

2.5 Untersuchung der Matrix $\boldsymbol{B}_2$

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 500 \\ -0.2 & 400 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det \boldsymbol{B}_2 = 500$$

2.6 Lösung mit Cramerscher Regel und Lösungsmenge

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{\det \boldsymbol{B}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \tfrac{620}{0.94} = 659.57 \\ x_2 &= \tfrac{\det \boldsymbol{B}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \tfrac{500}{0.94} = 531.91 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{(659.57, 531.91)\}$$