Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

11. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Definition eines Vektorraums $\mathbb{R}^n$, Besprechung der Vektorraumaxiome als Grundlage der Rechenregeln für Vektoren.
- Rechenregeln für Matrizen:
  - Transponierte $\boldsymbol{A}^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
  - Elementweise Multiplikation $c \cdot \boldsymbol{A}$ einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$.
  - Elementweise Addition $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ zweier Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
  - Multiplikation zweier Matrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Das Produkt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ kann mit Hilfe des *Falkschen Schemas*[1] berechnet werden.
  - Einführung der quadratischen Einheitsmatrix $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Definition der Inversen $\boldsymbol{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Hilfe der Gleichung $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$.
  - Determinante $\det \boldsymbol{A}$ einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Existenzbedingung der Inversen: Gilt $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, dann existiert die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn gilt: $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. In diesem Fall ist die Lösung des Gleichungssystems: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{x}$.

[1] Vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Falksches Schema

2 Lineares Gleichungssystem - Anwendungsbeispiel

Von nachfolgendem Beispiel aus der Vorlesung ist der Lösungsvektor $\vec{x}^T = (x\ y\ z)$ gesucht.

$$\begin{aligned} -3 - y &= 2z \\ x - 1 &= 4 \\ 2y + 6 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

2.1 Sortieren des Gleichungssystems

Alle gesuchten Größen auf die linke Seite bringen, in alphabetischer Reihenfolge sortieren und – wenn erforderlich – fehlende Vorfaktoren „1“ und „0“ ergänzen:

$$\begin{array}{ccccr} 0x & -1y & -2z & = & 3 \\ 1x & +0y & +0z & = & 5 \\ 0x & +2y & +0z & = & -6 \end{array}$$

2.2 Gleichungssystem in Matrixschreibweise: $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2.3 Determinante der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$

$$\det \boldsymbol{A} = (-1) \cdot [(-1) \cdot (+0) - (+2) \cdot (-2)] = -4 \neq 0$$

Die Entwicklung der Determinante erfolgt nach der ersten Spalte von $\boldsymbol{A}$. Da die Determinante nicht null ist, ist das lineare Gleichungssystem (1) eindeutig lösbar mit Hilfe der Inversen[2] $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.4 Überprüfung der Inversen mit Hilfe des Falkschen Schemas

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \\ \hline \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & +4 & 0 \\ 0 & 0 & +2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \quad \checkmark \end{array}$$

[2] Für weiterführende Studien: Die Inverse kann durch Lösen des Gleichungssystems $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ für die Matrixelemente von $\boldsymbol{A}^{-1}$ berechnete werden. Sie lässt sich aber auch über die Konstruktion der Adjunkten $\boldsymbol{A}^{\text{adj}}$ bilden, vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Inverse_Matrix.

2.5 Lösen des Gleichungssystems durch Berechnung von $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{x}$

$$\vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{(5, -3, 0)\}.$$

2.6 Überprüfung der Lösung durch Einsetzen in $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{b} \quad \checkmark$$

3 Skalarprodukt - Anwendungsbeispiel

Der Portfoliobericht einer Pensionskasse weist zum Jahresultimo folgende prozentuale Anteile verschiedener Vermögensklassen und deren Ertragserwartung im kommenden Jahr aus:

Vermögensklasse	**Gewichtung**	**Ertragserwartung**
Staatsanleihen	$\omega_1 = 50\ \%\ (\hat{=}\ 0.50)$	$r_1 = 0.1\ \%$
Pfandbriefe	$\omega_2 = 35\ \%\ (\hat{=}\ 0.35)$	$r_2 = 0.2\ \%$
Aktien	$\omega_3 = 10\ \%\ (\hat{=}\ 0.10)$	$r_3 = 7.5\ \%$
Rohstoffe	$\omega_4 = 5\ \%\ (\hat{=}\ 0.05)$	$r_4 = 15.0\ \%$

Wie hoch ist die Ertragserwartung R des Portfolios im kommenden Jahr?

Die Ertragserwartung R des Portfolios berechnet sich als Skalarprodukt aus dem Gewichtsvektor $\vec{\omega}^{\,T} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\vec{r}^{\,T} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix}$ der einzelnen Ertragserwartungen:

$$R = \vec{\omega}^{\,T} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.10 & 0.05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1\ \% \\ 0.2\ \% \\ 7.5\ \% \\ 15.0\ \% \end{pmatrix} = 1.62\ \%$$

Der erwartete Ertrag des Portfolios im kommenden Jahr beträgt somit 1.62 %.