Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

14. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Modellierung von ein- und mehrstufigen Produktionsverfahren.

  Die mathematische Beschreibung derartiger Produktionsverfahren erfolgt mit Gleichungssystemen oder mit Matrizengleichungen.

  Das so notierte mathematische Modell stellt dann einen Zusammenhang zwischen den Endprodukten und Vor- oder Zwischenprodukten her.

  Ist die Menge der Endprodukte bekannt, kann die benötigte Menge an Vor- oder Zwischenprodukten berechnet werden.

  Begriffe: Produktionsbeschreibung, Gozintograph, Input-Output-Tabelle, Bedarfsmatrizen, Eingangs- und Ausgangsvektoren.

  Beispiel: Ein zweistufiges Produktionsverfahren (Rohstoff-Zwischenprodukt-Endprodukt)

  $$\vec{r} \xrightarrow{\boldsymbol{A}} \vec{z} \xrightarrow{\boldsymbol{B}} \vec{x}$$

  kann stufenweise

  $$\text{Stufe 1:} \quad \vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z} \qquad \text{Stufe 2:} \quad \vec{z} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{x}$$

  oder in einer Gesamtbetrachtung

  $$\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \vec{x}$$

  modelliert werden. Die neue Matrix $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ heißt dann die Rohstoffbedarfsmatrix[1].

  Abhängig von den bestellten Produktmengen $\vec{x}$ kann der Bedarf an Rohstoffen $\vec{r}$ berechnet werden.

[1] Verallgemeinerung für n-Produktionsstufen: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}_n$

- Modellierung von verflochtenen Produktionsverfahren (Leontief-Modell).

  Die mathematische Beschreibung derartiger Produktionsverfahren erfolgt ebenfalls mit Gleichungssystemen oder mit Matrizengleichungen.

  Die folgenden das Produktionsverfahren beschreibende Vektoren werden bei der Modellierung miteinander verknüpft:

  – Gesamtproduzierte Menge $\vec{x}$.
    Andere Bezeichnungen: Gesamtproduktionsvektor, hergestellte Menge, Produktionsvektor.
  – Eigenverbrauchsmenge $\vec{e}$.
    Andere Bezeichnungen: System interne Mengen.
  – Kundennachfrage $\vec{y}$.
    Andere Bezeichnungen: Konsumvektor, Fremdverbrauch, Endnachfrage.

  Die zentrale Matrix solcher verflochtenen Systeme ist die Matrix des Eigenbedarfs $\boldsymbol{A}$. Sie beschreibt die Verflechtung des Produktionsverfahrens.

  In verschiedenen Literaturquellen wird die Matrix $\boldsymbol{A}$ auch als Technologiematrix, Verflechtungsmatrix, Matrix der Produktionskoeffizienten oder Input-Matrix bezeichnet.

  Mit der Matrix $\boldsymbol{A}$ des Eigenbedarfs können fünf Grundgleichungen zur Beschreibung verflochtener Produktionsverfahren notiert werden:

(I.)	$\vec{e} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}$	
(II.)	$\vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \vec{e}$	Falls $\boldsymbol{A}$ invertierbar.
(III.)	$\vec{y} = \vec{x} - \vec{e}$	
(IV.)	$\vec{y} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x}$	
(V.)	$\vec{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \vec{y}$	Falls $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$ invertierbar.

  Die Matrix $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$ wird auch als *Leontief-Inverse* bezeichnet.

  Ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ bekannt, können grundsätzlich drei Aufgaben[2] mit den oben notierten Grundgleichungen (I. bis V.) bearbeitet werden:

  – Wenn die gesamtproduzierte Menge $\vec{x}$ bekannt ist, berechne $\vec{e}, \vec{y}$.
  – Wenn die Eigenverbrauchsmenge $\vec{e}$ bekannt ist, berechne $\vec{x}, \vec{y}$.
  – Wenn die Kundennachfragemenge $\vec{y}$ bekannt ist, berechne $\vec{x}, \vec{e}$.

[2] Invertierbarkeit von $\boldsymbol{A}$ bzw. $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$ beachten!